

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapa locală, 07.02.2026

Filiera tehnologică – toate profilele

Clasa a XI-a

1. Un inginer proiectează trei puncte de prindere pe un panou dreptunghiular, având coordonatele $A(2, m)$, $B(m+1, m)$ și $C(1, 2)$, unde m este un număr real.

a) (10p) Determinați valorile reale ale lui m pentru care cele trei puncte se află pe aceeași dreaptă. (Această situație nu este de dorit, deoarece panoul ar fi instabil)

b) (10p) Determinați valorile reale ale lui m pentru care aria triunghiului format de punctele A , B și C este egală cu 1.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = A - 2I_2$, $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

a) (10p) Arătați că $B^{2026} + A^2 = 4 \cdot (I_2 + B)$.

b) (15p) Demonstrați că $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, pentru orice număr natural nenul n și calculați A^{2026} .

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 - 3ax}, & x < 1 \\ \frac{x^2 - a}{3x} + 1, & x \geq 1 \end{cases}$, unde a este un număr real, $a \leq \frac{4}{3}$.

a) (10p) Determinați numerele reale a pentru care funcția are limită în $x_0 = 1$.

b) (10p) Pentru $a = 1$, determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f și verificați dacă această dreaptă este paralelă cu dreapta de ecuație $x - 3y = -2026$.

4. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ și $g(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$.

a) (15p) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ și arătați că $4g(2x) - g(x) = f(x) \cdot \frac{\sin x}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

b) (10p) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.